

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Г.ШУХОВА»**
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

УТВЕРЖДАЮ
Директор института ЭИТУС
Белоусов А.В.
«23» 05 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
дисциплины

Вычислительная математика

Направление подготовки:
09.03.04 Программная инженерия

Направленность программы (профиль, специализация):

Разработка программно-информационных систем

Квалификация (степень)
бакалавр

Форма обучения
очная

Институт энергетики, информационных технологий и управляющих систем

**Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем**

Белгород – 2019

Рабочая программа составлена на основании требований:

- Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 09.03.04 Программная инженерия, утверждённого приказа Минобрнауки России от 19 сентября 2017 г. № 920
- учебного плана, утвержденного ученым советом БГТУ им. В.Г. Шухова в 2019 году.

Составитель:

_____ (ученая степень и звание, подпись)

(Т.В. Бондаренко)

(инициалы, фамилия)

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры

Программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

« 18 » _____ мая _____ 2019 г., протокол № _____ 10

Заведующий кафедрой:

к.т.н., доцент
_____ (ученая степень и звание, подпись)

(В.М. Поляков)

(инициалы, фамилия)

Рабочая программа согласована с выпускающей кафедрой

Программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Заведующий кафедрой:

к.т.н., доцент
_____ (ученая степень и звание, подпись)

(В.М. Поляков)

(инициалы, фамилия)

« 18 » _____ мая _____ 2019 г.

Рабочая программа одобрена методической комиссией института

Энергетики, информационных технологий и управляющих систем

« 28 » _____ мая _____ 2019 г., протокол № _____ 9

Председатель:

к.т.н., доцент
_____ (ученая степень и звание, подпись)

(А.Н. Семернин)

(инициалы, фамилия)

1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Категория (группа) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Наименование показателя оценивания результата обучения по дисциплине
Применение естественнонаучных и общеинженерных знаний	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Применяет основы естественнонаучных и общеинженерных знаний в профессиональной деятельности	<p>Знания: основ вычислительной математики</p> <p>Умения: применять основы вычислительной математики в профессиональной деятельности</p> <p>Навыки: применения основ вычислительной математики при решении задач в профессиональной деятельности</p>
		ОПК-1.2. Решает стандартные профессиональные задачи с применением методов математического анализа и моделирования	<p>Знания: методов вычислительной математики, необходимые для решения стандартных профессиональных задач</p> <p>Умения: решать стандартные профессиональные задачи с применением методов вычислительной математики</p> <p>Навыки: решения стандартные профессиональные задачи с применением методов вычислительной математики в заданных ограничениях</p>
		ОПК-1.3. Использует методы теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	<p>Знания: методов вычислительной математики, необходимые для теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности</p> <p>Умения: использовать методы вычислительной математики для теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности</p> <p>Навыки: использования методов вычислительной математики для теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в заданных условиях</p>
Понимание принципов работы современных информационных технологий	ОПК-2. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и программных	ОПК-2.1. Понимает принципы работы современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного	<p>Знания: основных принципов работы современных информационных и программных систем</p> <p>Умения: составлять программы, решения математических задач, используя</p>

	средств, в том числе отечественного производства, и использовать их при решении задач профессиональной деятельности	производства	методы вычислительной математики Навыки: описания алгоритмов решения профессиональных задач с помощью методов вычислительной математики
		ОПК-2.2 Использует современные информационные технологии и программные средства, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности	Знания: основных принципов работы современных информационных и программных систем Умения: реализовывать вычислительные алгоритмы численных методов для решения вычислительных задач с заданной точностью с учетом ограничений. Навыки: применения программных средств в профессиональной деятельности для реализации алгоритмов решения профессиональных задач с использованием методов вычислительной математики

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1. Компетенция ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общепрофессиональные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

Данная компетенция формируется следующими дисциплинами:

Стадия	Наименования дисциплины
1.	Математический анализ
2.	Алгебра и геометрия
3.	Физика
4.	Информатика
5.	Инженерная графика
6.	Дискретная математика
7.	Математическая логика и теория алгоритмов
8.	Вычислительная математика
9.	Теория вероятностей и математическая статистика
10.	Исследование операций

2. Компетенция ОПК-2. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного производства, и использовать их при решении задач профессиональной деятельности
 Данная компетенция формируется следующими дисциплинами.

Стадия	Наименования дисциплины
1.	Информатика
2.	Вычислительная математика
3.	Базы данных
4.	Операционные системы
5.	Основы информационной безопасности
6.	Учебная ознакомительная практика
7.	Производственная технологическая (проектно-технологическая) практика

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зач. единиц, 144 часа.

Дисциплина реализуется в рамках практической подготовки: 2 зач. единиц.

Форма промежуточной аттестации: дифференцированный зачет

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр № 4
Общая трудоемкость дисциплины, час	144	144
Контактная работа (аудиторные занятия), в т.ч.:	71	71
лекции	34	34
лабораторные	34	34
практические	—	—
групповые консультации в период теоретического обучения и промежуточной аттестации	3	3
Самостоятельная работа студентов, включая индивидуальные и групповые консультации, в том числе:	73	73
Курсовой проект	—	—
Курсовая работа	—	—
Расчетно-графическое задания	—	—
Индивидуальное домашнее задание	18	18
Самостоятельная работа на подготовку к аудиторным занятиям (лекции, практические занятия, лабораторные занятия)	55	55
Дифференцированный зачет	—	—

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Наименование тем, их содержание и объем

Курс 2 Семестр 4

№ п/п	Наименование раздела (краткое содержание)	Объем на тематический раздел по видам учебной нагрузки, час			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
1. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)					
	Прямой и обратный ход метода Гаусса. Схема единственного деления: условия реализации, алгоритм. Схема с выбором максимального по модулю элемента: условия применения, алгоритм реализации. Применение метода Гаусса: вычисление определителя матрицы, вычисление матрицы обратной к данной матрице. Решения СЛАУ с произвольным числом правых частей и одной и той же матрицей коэффициентов при неизвестных за одну реализацию метода Гаусса.	2	—	2	3
2. Интерполирование функций					
	Понятие интерполяции. Понятие интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Понятие и свойства разделенных и конечных разностей. Интерполяционный многочлен Ньютона. Относительная и абсолютная погрешность вычисления.	2	—	2	3
3. Численное интегрирование					
	Постановка задачи. Квадратурная формула: понятие и свойства. Формула центральных прямоугольников. Формула трапеций. Формула парабол (Симпсона). Погрешность интегрирования. Принцип Рунге для оценки погрешности. Квадратурная формула Гаусса.	4	—	2	3
4. Численное дифференцирование					
	Постановка задачи. Двух- трех- четырехточечные формулы производной функции.	2	—		1
5. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ)					
	Понятие дифференциального уравнения (ДУ), решения ДУ, начальных условий, интегральной кривой. Постановка задачи Коши. Метод последовательного дифференцирования для приближенного решения задачи Коши. Численные методы решения задачи Коши: метод Эйлера, метод Эйлера-Коши, модифицированный метод Эйлера, метод Рунге-Кутты. Численное решение нормальных систем дифференциальных уравнений.	4	—	2	4
6. Одномерная минимизация функций					

	Постановка задачи. Понятие локального и глобального минимума функции. Понятие унимодальности функции, нахождение отрезков унимодальности функции. Методы минимизации функции: оптимальный пассивный поиск, метод деления отрезка пополам, метод чисел Фибоначчи, метод золотого сечения.	3	—	4	10
7. Многомерная минимизация функций					
	Постановка задачи. Понятие локального и глобального минимума функции. Понятие градиента функции. Минимизация функции многих переменных методом градиента с дроблением шага. Метод наискорейшего спуска.	3	—	4	4
8. Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона					
	Постановка задачи. Выбор начального приближения к решению системы. Линеаризация системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными.	1	—	2	3
9. Решения нелинейных уравнений с одним неизвестным					
	Понятие корня уравнения. Локализация корня. Теоремы существования и единственности корня. Метод хорд: условия применимости, неподвижная и подвижная точки, алгоритм. Метод касательных: условия применимости, неподвижная и подвижная точки, алгоритм. Комбинированный метод: условие применения, алгоритм.	4	—	4	10
10. Метод итераций для решения СЛАУ					
	Норма вектора и норма матрицы. Первая норма, вторая норма, бесконечная норма матрицы и вектора: понятие и вычисление. Метод простой итерации: алгоритм, условие сходимости, правило остановки. Оценка погрешности решения	4	—	4	6
11. Собственные числа и собственные векторы матрицы					
	Понятие собственного числа и собственного вектора матрицы. Степенной метод приближенного вычисления: алгоритм. Степенной метод со сдвигами.	2	—	4	4
12. Аппроксимация данных					
	Постановка задачи. Метод наименьших квадратов: алгоритм. Оценка качества аппроксимации.	3	—	4	4
	ВСЕГО	34		34	55

4.2. Содержание практических (семинарских) занятий

Не предусмотрено учебным планом

4.3. Содержание лабораторных занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Тема лабораторного занятия	К-во часов	К-во часов СРС
семестр № 4				
1	Метод Гаусса для решения СЛАУ	Метод Гаусса решения СЛАУ.	2	2
2	Интерполирование функций	Интерполяция функций	2	2
3	Численное интегрирование	Численное интегрирование.	2	2
4	Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ)	Численные методы решения задачи Коши	2	2
5	Одномерная минимизация функции	Одномерная минимизация функций	4	4
6	Многомерная минимизация функций	Минимизация функции многих переменных методом градиента с дроблением шага	4	4
7	Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона	Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона	2	2
8	Решения нелинейных уравнений с одним неизвестным	Комбинированный метод решения нелинейных уравнений	4	4
9	Методом итераций для решения СЛАУ	Решение систем линейных уравнений методом итераций	4	4
10	Собственные числа и собственные векторы матрицы	Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы	4	4
11	Аппроксимация данных	Метод наименьших квадратов	4	4
ИТОГО:			34	34
ВСЕГО:				68

4.4. Содержание курсового проекта/работы

Не предусмотрено учебным планом

4.5. Содержание расчетно-графического задания, индивидуальных домашних заданий

Учебным планом предусмотрены 2 ИДЗ. На выполнение ИДЗ предусмотрено 9 часов самостоятельной работы студента.

ИДЗ №1. Минимизация функций одной переменной. Метод «золотого сечения».

Цель работы: изучение метода «золотого сечения» для приближенного вычисления значения минимума функции и получение практических навыков его использования.

ИДЗ №2. Решение нелинейных уравнений с одним неизвестным. Метод хорд. Метод касательных.

Цель работы: изучение методов решения нелинейных уравнений с одним неизвестным и получение практических навыков их использования.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

5.1. Реализация компетенций

1. Компетенция ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

Наименование индикатора достижения компетенции	Используемые средства оценивания
ОПК-1.1. Применяет основы естественнонаучных и общинженерных знаний в профессиональной деятельности	защита лабораторной работы; защита ИДЗ, диф. зачет
ОПК-1.2. Решает стандартные профессиональные задачи с применением методов математического анализа и моделирования	защита лабораторной работы, защита ИДЗ, диф. зачет
ОПК-1.3. Использует методы теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	защита лабораторной работы

2. Компетенция ОПК-2. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного производства, и использовать их при решении задач профессиональной деятельности

Наименование индикатора достижения компетенции	Используемые средства оценивания
ОПК-2.1. Понимает принципы работы современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного производства	защита лабораторной работы
ОПК-2.2. Использует современные информационные технологии и программные средства, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности	защита лабораторной работы

5.2. Типовые контрольные задания для промежуточной аттестации

5.2.1. Перечень контрольных вопросов (типовых заданий) для дифференцированного зачета

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание вопросов (типовых заданий)
1	Метод Гаусса для решения СЛАУ (ОПК-1)	Понятие СЛАУ. Решение СЛАУ: единственное; бесконечное множество решений; ни одного решения. Идея метода Гаусса. Описание прямого хода метода Гаусса. Алгоритм прямого хода. Условие реализуемости прямого хода схемы с выбором максимального по модулю элемента. Обратный ход метода Гаусса. Алгоритм обратного хода. Вычисление определителя матрицы методом Гаусса. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса.
2	Интерполирование функций (ОПК-1)	Постановка задачи приближения функций. Источники такой задачи. Задача интерполяции. Интерполяция в некотором классе функций. Узлы интерполяций. Полиномиальная интерполяция. Условие существования и единственности решения задачи интерполяции обобщенным многочленом. Определение и свойства конечных разностей. Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными разностями для интерполирования: вперед; назад. Определение и свойства разделенных разностей. Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности интерполяционного многочлена.
3	Численное интегрирование (ОПК-1)	Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурная формула: определение, узлы, веса и погрешность. Формула центральных прямоугольников: геометрическое обоснование и погрешность. Формула трапеций: геометрическое обоснование и погрешность. Формула Симпсона (парабол): обоснование и погрешность. Правило Рунге оценки погрешности квадратурной формулы, достижение заданной точности. Формула Гаусса: постановка задачи; вывод системы уравнений для узлов и весов на отрезке интегрирования $[-1; 1]$; переход к любому отрезку интегрирования $[a, b]$.
4	Численное дифференцирование (ОПК-1)	Постановка задачи численного дифференцирования. Приближенное вычисление производных с помощью интерполяционных многочленов (случай равномерной и неравномерной сетки) Приближенные значения производных в узловых точках.
5	Приближенное решение обыкновенных дифференциальных	Определение задачи Коши для ДУ. Классификация методов приближенного решения задачи Коши.

	уравнений (ДУ) (ОПК-1)	Метод последовательного дифференцирования. Метод Эйлера: геометрический смысл, погрешность. Методы второго порядка. Метод Эйлера-Коши; модифицированный метод Эйлера. Метод Рунге-Кутты. Правило Рунге оценки погрешности численного решения задачи Коши. Приближенное решение нормальных систем ДУ.
6	Одномерная минимизация функций (ОПК-1)	Постановка задачи одномерной минимизации функции. Понятие локального и глобального минимума функции. Определение и достаточные условия локального минимума. Этапы решения задачи минимизации функции на отрезке. Определение и достаточное условие унимодальности функции на отрезке. Определение деления отрезка в «золотом сечении». Методы минимизации функции: оптимальный пассивный поиск, метод деления отрезка пополам, метод чисел Фибоначчи, метод «золотого сечения». Алгоритм метода золотого сечения. Правило остановки. Нахождение глобального минимума функции.
7	Многомерная минимизация функций (ОПК-1)	Постановка задачи многомерной минимизации. Необходимое и достаточное условие точки локального минимума. Характеристика методов спуска. Метод градиента с дроблением шага. Алгоритм метода и правило остановки. Метод наискорейшего спуска.
8	Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона (ОПК-1)	Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона. Выбор начального приближения к решению системы. Линеаризация системы.
9	Решения нелинейных уравнений с одним неизвестным (ОПК-1)	Определения: корня уравнения, приближенного значения корня уравнения. Методы отделения корней. Геометрическая иллюстрация метода хорд. Признак неподвижной точки. Алгоритм метода хорд. Вывод вычислительных формул. Метод Ньютона (касательных). Геометрическая иллюстрация метода. Вычислительная формула. Выбор начального приближения. Условия применимости комбинированного метода. Алгоритм комбинированного метода. Правило остановки.
10	Методом итераций для решения СЛАУ (ОПК-1)	Определение нормы вектора в n -мерном векторном пространстве, p -норма; случаи $p = 1, 2, \infty$. Определение нормы матрицы, подчиненной данной норме вектора. Примеры норм. Форма системы линейных уравнений, необходимая для применения метода итераций. Идея метода. Алгоритм метода итераций. Правило остановки. Априорная и апостериорная оценка сходимости метода итераций. Переход от данной системы к системе, решаемой методом итераций.
11	Собственные числа и	Определение собственного числа и соответствующего ему

	собственные векторы матрицы (ОПК-1)	собственного вектора матрицы A . Степенной метод: условие применимости, алгоритм, правило остановки. Вычисление следующего по модулю собственного числа.
12	Аппроксимация данных (ОПК-1)	Постановка задачи аппроксимации. Аппроксимация данных методом наименьших квадратов с помощью обобщенного многочлена. Погрешность аппроксимаций.

Типовые задачи к дифференцированному зачету (ОПК-1)

1. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

2. Методом Гаусса вычислить определитель матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Методом Гаусса вычислить матрицу обратную к матрице A .
4. Найти приближенное значение функции $y(x) = \ln(x)$, используя интерполяционный многочлен Лагранжа, при $x = a = 1,23$.
5. Найти приближенное значение функции $y(x) = \ln(x)$, используя интерполяционный многочлен Ньютона при $x = a = 1,23$.
6. Найти приближенное значение определенного интеграла по формуле метода центральных прямоугольников/трапеций/парабол:

$$\int_{-2}^1 (6x^2 - 2x + 3) dx$$

7. Найти приближенное значение определенного интеграла по формуле Гаусса:

$$\int_3^5 (2^x + \ln x) dx$$

8. Найти численное решение задачи Коши методом Эйлера/Эйлера-Коши/модифицированным методом Эйлера/Рунге-Кутты:

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 + x, \quad y|_{x=1} = 3, \quad 1 \leq x \leq 2$$

9. Найти приближенное решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона:

$$\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

10. Найти приближенное значение минимума функции:

$$y = (4x^2 - 9)(x^2 + 1)$$

1. По таблице значений функции выполнить построение интерполяционного многочлена Лагранжа/Ньютона и определите приближенное значение функции в точке $x=0,25$.

i	0	1	2	3
x_i	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	4,8	3,6	3,2	2,8

2. С помощью метода Гаусса вычислить определитель матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Выполните один шаг метода градиента с дроблением шага для поиска приближенного значения минимума функции: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$

В качестве начального приближения использовать точку: $\vec{x}^{(0)} = (0,0)$. Сравните значения функции в точках $\vec{x}^{(0)}$ и $\vec{x}^{(1)}$.

4. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

5. Используя метод Гаусса, найдите обратную матрицу к матрице A или докажите, что она не существует:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Решите методом итераций систему уравнений с точностью $\varepsilon=0,01$

$$\begin{cases} 3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2 \\ 6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8 \\ 2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.6 \end{cases}$$

7. Используя метод хорд/касательных/комбинированный, найдите второе приближение к точному значению корня уравнения

$$x^3 - 2.5x^2 - x + 2 = 0.$$

Выполнить поиск отрезка локализации корня графически и доказать для него выполнение условий применимости метода касательных

8. Методом последовательного дифференцирования найдите первые 3 члена разложения в ряд решения задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = \sin x + y^2 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

9. Используя метод «золотого сечения», найдите с точностью $\varepsilon=0,25$ приближенное значение минимума функции $f(x)$ и значение функции в точке минимума:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$$

10. Методом Ньютона с точностью $\varepsilon=0,01$ найдите одно из решений системы уравнений:

$$\begin{cases} y(x-1) - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

11. Вычислите по формуле центральных прямоугольников/трапеций/Симпсона при $n=6$ интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 4x + 2}{x} dx$$

12. Найдите численное решение задачи Коши методом Рунге-Кутты

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

с шагом $h=0,1$, на отрезке $[1; 1,2]$.

5.2.2. Перечень контрольных материалов для защиты курсового проекта/ курсовой работы

Не предусмотрено учебным планом.

5.3. Типовые контрольные задания (материалы) для текущего контроля в семестре

Текущий контроль осуществляется в течение семестра в форме выполнения и защиты лабораторных работ, выполнения и защиты индивидуальных домашних заданий.

В методических указаниях по выполнению лабораторных работ представлен перечень лабораторных работ, обозначены цель и задачи, необходимые теоретические и методические указания к работе, рассмотрены практические примеры, представлены индивидуальные варианты заданий и перечень контрольных вопросов.

Защита лабораторной работы проводится в форме собеседования, включая тестовый контроль студента и направлена на проверку степени усвоения материала и понимания теоретических сведений, используемых в процессе выполнения работы; для защиты необходимо представить в печатной (рукописной) форме отчет по лабораторной работе, выполненный самостоятельно и в соответствии со всеми требованиями, приведёнными в методических указаниях к выполнению лабораторных работ. Примерные перечень контрольных вопросов для защиты лабораторных работ приведен в таблице:

Тематика лабораторной работы	Контрольные вопросы
Лабораторная работа № 1. Метод Гаусса для решения СЛАУ (ОПК-1, ОПК-2)	Определение матрицы. Правила выполнения действий над матрицами. Определение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Определение решения СЛАУ. Форма записи системы линейных алгебраических уравнений. Случаи, когда СЛАУ имеет единственное решения, не имеет решения, имеет бесконечное множество решений. Этапы схемы единственного деления метода Гаусса. Описание первого шага прямого хода метода Гаусса. Условие его выполнимости. Описание обратного хода метода Гаусса. Недостатки схемы единственного деления метода Гаусса. Вычисление определителя матрицы по методу Гаусса. Решение методом Гаусса систем линейных уравнений с общей матрицей коэффициентов при неизвестных и произвольным числом столбцах свободных членов. Понятие обратной матрицы. Связь между матрицей и обратной к ней матрицей. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса. Как в вашей программной реализации учтены СЛАУ, которые не имеют решения или имеют бесконечное множество решений? Как в вашей программе учтена возможность отсутствия матрицы обратной к заданной матрице A ? Как в вашей программе реализован подсчет числа обменов строк расширенной матрицы СЛАУ?
Лабораторная работа № 2. Интерполирование функций	Понятие интерполяционного многочлена и его свойства. Форма записи интерполяционного многочлена степени n . Интерполяционный многочлен Лагранжа: понятие, форма записи.

<p>(ОПК-1, ОПК-2)</p>	<p>Определение разделенных разностей: первого, второго, k-го порядка. Определение конечных разностей: первого, второго, k-го порядка. Интерполяционный многочлен Ньютона: интерполирование вперед, интерполирование назад. Погрешность интерполяционного многочлена. Принцип Рунге для оценки погрешности вычислений.</p> <p>Как в вашей программной реализации учитывается принцип Рунге для достижения заданной точности решения? Как в вашей программе реализована проверка вводимой интерполяционной сетки на равномерность? Какой результат выдаст ваша программа, если заданное значение аргумента не будет входить в интервал интерполяции (x_0, x_n)?</p>
<p>Лабораторная работа № 3. Численное интегрирование (ОПК-1, ОПК-2)</p>	<p>Понятие интеграла. Неопределенный интеграл. Постановка задачи численного интегрирования. Понятие и геометрический смысл определенного интеграла. Формула центральных прямоугольников. Геометрическое обоснование. Формула трапеций. Геометрическое обоснование. Формула парабол. Геометрическое обоснование. Квадратурная формула Гаусса. Погрешность квадратурной формулы.</p> <p>Как в вашей программной реализации учтено использование принципа Рунге? Как в табличном редакторе, например, Excel, выполнить вычисление приближенного значения интеграла по формуле центральных прямоугольников? Как в вашей программе реализовано задание подынтегральной функции?</p>
<p>Лабораторная работа № 4. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) (ОПК-1, ОПК-2)</p>	<p>Определение дифференциального уравнения (ДУ). Порядок ДУ. Определение решения ДУ. Постановка задачи Коши. Решение задачи Коши. Понятие аналитического метода приближенного решения задачи Коши. Понятие численного метода приближенного решения задачи Коши. Метод последовательного дифференцирования. Геометрический смысл метода Эйлера. Методы второго порядка точности: формулы вычисления. Метод Рунге-Кутты: формулы вычисления. Относительная и абсолютная погрешность. Применение принципа Рунге для достижения заданной точности. Приближенное значение функции в точке по методу Рунге.</p> <p>Как в вашей программе реализован принцип Рунге? Как с помощью вашей программы вычислить абсолютную и относительную погрешность приближенного решения? Как в табличном редакторе, например, Excel, построить график функции $y(x)$?</p>
<p>Лабораторная работа № 5. Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона (ОПК-1, ОПК-2)</p>	<p>Определение системы уравнений. Определение решения системы уравнений. Понятие СЛАУ. Условие единственности решения СЛАУ. Корень системы уравнений: графическая интерпретация. Понятие частной производной функции нескольких переменных и ее вычисление. Ряд Тейлора: понятие, вычислительные формулы. Линеаризация системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными. Правила Крамера для решения системы линейных уравнений. Выбор начального приближения к точному решению системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона.</p>

	<p>Правило остановки для решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона.</p> <p>Как в табличном редакторе, например, Excel, построить график функции $y(x)$?</p> <p>Как с помощью вашей программы проверить погрешность полученного решения?</p> <p>Как в вашей программе реализован ввод функции и ее производных?</p>
Лабораторная работа № 6. Одномерная минимизация функции (ОПК-1, ОПК-2)	<p>Постановка задачи одномерной минимизации.</p> <p>Понятие локального и глобального минимума функции $y = f(x)$.</p> <p>Понятие локального и глобального максимума функции $y = f(x)$.</p> <p>Понятие унимодальности функции на отрезке.</p> <p>Теорема об уменьшении отрезка локализации точки минимума функции.</p> <p>Локализация минимума функции с помощью ее графика.</p> <p>Метод оптимального поиска: понятие, вычислительные формулы.</p> <p>Метод, основанный на использовании чисел Фибоначчи: понятие, вычислительные формулы.</p> <p>Метод деления отрезка пополам: понятие, вычислительные формулы.</p> <p>Метод «золотого сечения»: понятие, вычислительные формулы</p> <p>Как в вашей программе реализовано использование чисел Фибоначчи? Вы храните эти значения?</p> <p>Как в вашей программе реализован метод оптимального поиска? Нужно ли сохранять вычисляемые значения функции?</p> <p>Как в табличном редакторе, например, Excel, реализовать метод оптимального поиска?</p>
Лабораторная работа № 7. Минимизация функции многих переменных методом градиента с дроблением шага (ОПК-1, ОПК-2)	<p>Определение точки локального минимума функции m переменных.</p> <p>Определение точки глобального минимума функции m переменных.</p> <p>Понятие окрестности точки в m-мерном пространстве.</p> <p>Понятие поверхности уровня для целевой функции.</p> <p>Определение градиента функции m переменных</p> <p>Условие локального минимума функции m переменных.</p> <p>Метод градиента с дроблением шага: параметры, формула вычисления приближенного значения минимума функции, правило остановки.</p> <p>Как в вашей программе учтена возможность не достижения требуемой точности решения за приемлемое время?</p> <p>Как в вашей программе реализован ввод заданной функции?</p> <p>Как в вашей программе учтена возможность ошибки, например, Деление на ноль?</p>
Лабораторная работа № 8. Комбинированный метод решения нелинейных уравнений (ОПК-1, ОПК-2)	<p>Понятие решения уравнения с одним неизвестным.</p> <p>Кратность корня уравнения. Простые и кратные корни.</p> <p>Схема исследование функции.</p> <p>Построение графика функции.</p> <p>Поиск решения уравнения с одним неизвестным графическим методом.</p> <p>Метод хорд: условия, алгоритм, графическая интерпретация.</p> <p>Метод касательных: условия, алгоритм, графическая интерпретация.</p> <p>Комбинированный метод: условия, алгоритм, графическая интерпретация.</p> <p>Как с помощью вашей программы определить абсолютную и относительную погрешности решения?</p> <p>Как в табличном редакторе, например, Excel, выполнить простое исследование функции $y(x)$?</p> <p>Как в вашей программе учтена возможность, что на выбранном отрезке локализации корня находится кратный корень?</p>
Лабораторная работа № 9. Решение систем линейных	<p>Матрица и вектор: понятие, основные действия.</p> <p>Решение системы уравнений: точное и приближенное.</p>

уравнений методом итераций (ОПК-1, ОПК-2)	<p>Понятие нормы вектора и нормы матрицы. Вычисление первой и бесконечной нормы вектора и нормы матрицы. Понятие диагонального преобладания. Метод итераций: понятие, алгоритм метода. Оценка предполагаемого числа итераций.</p> <p>Как в вашей программе реализована проверка диагонального преобладания? Как в вашей программе учесть возможность завершения работы для СЛАУ, которое не гарантирует сходимость метода итераций? Как в табличном редакторе, например, Excel, выполнить проверку найденного приближенного решения СЛАУ?</p>
Лабораторная работа № 10. Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы (ОПК-1)	Понятие матрицы. Действия с матрицами. Понятие собственного числа матрицы. Понятие собственного вектора матрицы. Понятие и вычисление нормы вектора. Степенной метод: вычислительные формулы и алгоритм. Степенной метод со сдвигами: вычислительные формулы и алгоритм.
Лабораторная работа № 11. Аппроксимация данных Метод наименьших квадратов (ОПК-1, ОПК-2)	Постановка задачи аппроксимации данных. Постановка задачи интерполяции. Отличие интерполяции и аппроксимации функции. Графическая иллюстрация интерполирующей и аппроксимирующей функций. Получение вычислительных формул метода наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов: алгоритм. <p>Как в табличном редакторе, например, Excel, выполнить построение графика функции $u(x, y)$? Какие изменения необходимо внести в вашу программу для того, чтобы получить интерполяционный многочлен?</p>

Критерии оценки лабораторной работы: лабораторная работа считается защищенной, если студент выполнил задание к работе полностью и во время устного опроса по работе правильно ответил на заданные преподавателем дополнительные вопросы или верно выполнил тестовые задания.

Индивидуальное домашнее задание

На выполнение ИДЗ предусмотрено 9 часов самостоятельной работы студента.

ИДЗ №1. Решение нелинейных уравнений: метод хорд и метод касательных.

Цель: изучить и получить практические навыки решения нелинейных уравнений с использованием метода хорд и метода касательных.

Задания к работе: определить корни уравнения графически и аналитически; определить отрезок локализации корня; обосновать выбор неподвижной точки метода хорд и начального приближения каждого метода; вычислить корень уравнения с заданной точностью методом хорд и методом касательных; сравнить результаты двух методов.

ИДЗ №1. Минимизация функции одной переменной. Метод «золотого сечения».

Цель: изучить «метод золотого сечения» для нахождения приближенного решения задачи одномерной минимизации функции и получить практические навыки его применения.

Задания к работе: найти область определения функции, определить промежутки унимодальности функции; найти приближенное решение задачи одномерной минимизации $f(x) \rightarrow \min$ с заданной точностью.

Критерии оценки ИДЗ: для сдачи ИДЗ студенту необходимо представить в печатной (рукописной) форме отчет по ИДЗ. Защита проводится в форме устного опроса студента и направлена на проверку степени усвоения материала и понимания теоретических сведений, используемых в процессе выполнения работы.

5.4. Описание критериев оценивания компетенций и шкалы оценивания

Промежуточная аттестация в форме зачёта проводится по результатам текущего контроля знаний обучающегося во время защиты лабораторных работ. При промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета используется следующая шкала оценивания: 5 – отлично; 4 – хорошо; 3 – удовлетворительно; 2 – неудовлетворительно.

Критериями оценивания достижений показателей являются:

Наименование показателя оценивания результата обучения по дисциплине	Критерий оценивания
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	
ОПК-1.1. Применяет основы естественнонаучных и общинженерных знаний в профессиональной деятельности	
ОПК-1.2. Решает стандартные профессиональные задачи с применением методов математического анализа и моделирования	
ОПК-1.3. Использует методы теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	
Знания	Знание терминов, определений, понятий вычислительной математики
	Знание основных закономерностей, соотношений, принципов работы численных методов
	Объем освоенного материала
	Полнота ответов на вопросы
	Четкость изложения и интерпретации знаний
Умения	Умение решать стандартные профессиональные задачи с применением методов вычислительной математики
	Умение использовать теоретические знания для выбора методики решения профессиональных задач
Навыки	Владение навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, связанных с вычислительной математикой
	Качество выполнения исследований объектов профессиональной деятельности, связанных с вычислительной математикой
	Самостоятельность выполнения исследований объектов профессиональной деятельности, связанных с вычислительной математикой

Оценка преподавателем выставляется интегрально с учётом всех показателей и критериев оценивания.

Оценка сформированности компетенций по показателю Знания.

Критерий	Уровень освоения и оценка			
	2	3	4	5
Знание терминов, определений, понятий вычислительной математики	Не знает терминов и определений	Знает термины и определения, но допускает неточности формулировок	Знает термины и определения	Знает термины и определения, может корректно сформулировать их самостоятельно
Знание основных закономерностей, соотношений, принципов работы численных методов	Не знает основные закономерности и соотношения, принципы построения знаний	Знает основные закономерности, соотношения, принципы построения знаний	Знает основные закономерности, соотношения, принципы построения знаний, их интерпретирует и использует	Знает основные закономерности, соотношения, принципы построения знаний, может самостоятельно их получить и использовать
Объем освоенного материала	Не знает значительной части материала дисциплины	Знает только основной материал дисциплины, не усвоил его деталей	Знает материал дисциплины в достаточном объеме	Обладает твердым и полным знанием материала дисциплины, владеет дополнительными знаниями
Полнота ответов на вопросы	Не дает ответы на большинство вопросов	Дает неполные ответы на все вопросы	Дает ответы на вопросы, но не все ответы полные	Дает полные, развернутые ответы на поставленные вопросы
Четкость изложения и интерпретации знаний	Излагает знания без логической последовательности	Излагает знания с нарушениями в логической последовательности	Излагает знания без нарушений в логической последовательности	Излагает знания в логической последовательности, самостоятельно их интерпретируя и анализируя
	Не иллюстрирует изложение поясняющими схемами, рисунками и примерами	Выполняет поясняющие схемы и рисунки небрежно и с ошибками	Выполняет поясняющие рисунки и схемы корректно и понятно	Выполняет поясняющие рисунки и схемы точно и аккуратно, раскрывая полноту усвоенных знаний
	Неверно излагает и интерпретирует знания	Допускает неточности в изложении и интерпретации знаний	Грамотно и по существу излагает знания	Грамотно и точно излагает знания, делает самостоятельные выводы

Оценка сформированности компетенций по показателю Умения.

Критерий	Уровень освоения и оценка			
	2	3	4	5
Умение решать стандартные профессиональные задачи с применением методов вычислительной математики	Не умеет решать стандартные профессиональные задачи с помощью численных методов	Допускает неточности в решении стандартных профессиональных задач с помощью численных методов	Умеет решать стандартные профессиональные задачи с помощью численных методов	Безошибочно решает стандартные профессиональные задачи с помощью численных методов

математики		методов		
Умение использовать теоретические знания для выбора методики решения профессиональных задач	Не умеет использовать теоретические знания для выбора методики решения профессиональных задач с помощью численных методов	Использование теоретических знаний для выбора методики решения профессиональных задач с помощью численных методов вызывает затруднения	Умеет использовать теоретические знания для выбора методики решения профессиональных задач с помощью численных методов	Умело использует теоретические знания для выбора методики решения профессиональных задач с помощью численных методов

Оценка сформированности компетенций по показателю Навыки.

Критерий	Уровень освоения и оценка			
	2	3	4	5
Владение навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, связанных с вычислительной математикой	Не владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	Не достаточно хорошо владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	Профессионально владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности
Качество выполнения исследований объектов профессиональной деятельности, связанных с вычислительной математикой	Не качественно выполняет исследования объектов профессиональной деятельности, допускает грубые ошибки	Не достаточно качественно выполняет исследования объектов профессиональной деятельности, допускает и исправляет ошибки с посторонней помощью	Не достаточно качественно выполняет исследования объектов профессиональной деятельности, допускает и исправляет ошибки самостоятельно	Качественно выполняет исследования объектов профессиональной деятельности
Самостоятельность выполнения исследований объектов профессиональной деятельности, связанных с вычислительной математикой	Не может самостоятельно выполнять исследования объектов профессиональной деятельности	Выполняет исследования объектов профессиональной деятельности с посторонней помощью	При выполнении исследований объектов профессиональной деятельности иногда требуется посторонняя помощь	Самостоятельно выполняет исследования объектов профессиональной деятельности

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

6.1. Материально-техническое обеспечение

№	Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
1.	Учебная аудитория для проведения лекционных занятий	Специализированная мебель. Мультимедийная установка, экран, доски
2.	Учебная аудитория для проведения лабораторных занятий	Специализированная мебель. Компьютеры на базе процессоров Intel или AMD.
3.	Читальный зал библиотеки для самостоятельной работы	Специализированная мебель. Компьютерная техника, подключенная к сети интернет и имеющая доступ в электронно-образовательную среду

6.2. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение

№	Перечень лицензионного программного обеспечения.	Реквизиты подтверждающего документа
1.	Microsoft Windows 10 Корпоративная	(Соглашение Microsoft Open Value Subscription V6328633 Соглашение действительно с 02.10.2017 по 31.10.2020). Договор поставки ПО 0326100004117000038-0003147-01 от 06.10.2017.
2.	Microsoft Office Professional Plus 2016	(Соглашение Microsoft Open Value Subscription V6328633 Соглашение действительно с 02.10.2017 по 31.10.2020). Договор поставки ПО 0326100004117000038-0003147-01 от 06.10.2017.
3.	Kaspersky Endpoint Security «Стандартный Russian Edition».	Сублицензионный договор № 102 от 24.05.2018. Срок действия лицензии до 20.07.2019
4.	Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio 2013	Лицензионный договор № 63-14к от 2.07.2014
5.	Среды программирования Free Pascal, Dev C++ или CodeBlocks	Свободно распространяемое ПО согласно условиям лицензионного соглашения

6.3. Перечень учебных изданий и учебно-методических материалов

1. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд-во «Лань», 2006. – 664 с.
2. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 672 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2025>
3. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: МЭИ, 2003. – 595 с.
4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2008 г.
5. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65043>
6. Воеводин В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов: учебник, — М.: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2010. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13042>
7. Пантина И.В., Синчуков А.В. Вычислительная математика: учебник, — М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17012>
8. Рогова Н.В. Вычислительная математика: учебное пособие / Н.В. Рогова, В.А. Рычков. — Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. — 167 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/75370.html>
9. Бондаренко Т. В. Вычислительная математика. Лабораторный практикум для студентов направлений 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника, 09.03.04 — Программная инженерия / Т.В. Бондаренко, Е. А. Федотов. — Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. — 86 с.
10. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике - 2 издание. -М.: Высшая школа, 1990 г.
11. Поршнева С. В. Вычислительная математика: учебное пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004 г.
12. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике: учебное пособие. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006 г.
13. Рогова Н.В. Вычислительная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.В. Рогова, В.А. Рычков. — Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. — 167 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/75370.html>
14. Бондаренко Т.В. Вычислительная математика: методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий, предназначенные для студентов направлений 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника, 09.03.04 — Программная инженерия / Т. В. Бондаренко — Белгород: Изд-во БГТУ, 2019. — 23 с.

6.4. Перечень интернет ресурсов, профессиональных баз данных, информационно-справочных систем

1. Электронная библиотека (на базе ЭБС «БиблиоТех») — Режим доступа: <http://ntb.bstu.ru>
2. Электронно-библиотечная система IPRbooks — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru>
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ONLINE» — Режим доступа: <http://www.biblioclub.ru/>

УТВЕРЖДЕНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Рабочая программа утверждена на 2020 /2021 учебный год
без изменений / с изменениями, дополнениями

Протокол № 8 заседания кафедры от «21» 04 2020 г.

Заведующий кафедрой _____ (Поляков В.М.)


подпись, ФИО

Директор института _____ (Белоусов А.В.)


подпись, ФИО

УТВЕРЖДЕНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Рабочая программа утверждена на 2021/2022 учебный год
без изменений

Протокол № 9/1 заседания кафедры от « 15 » мая 2021 г.

Заведующий кафедрой _____

подпись, ФИО

Полков В.М.

Директор института _____

подпись, ФИО

Белюсов А.В.

УТВЕРЖДЕНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Рабочая программа утверждена на 2022 /2023 учебный год
без изменений / с изменениями, дополнениями

Протокол № 10 заседания кафедры от «20» 05 2022 г.

Заведующий кафедрой _____ Поляков В.М.
подпись, ФИО

Директор института _____ Белоусов А.В.
подпись, ФИО

УТВЕРЖДЕНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Рабочая программа утверждена на 2023/2024 учебный год без изменений.

Протокол № 8 заседания кафедры от « 4 » мая 2023 г.

Заведующий кафедрой _____ Поляков В.М.
подпись, ФИО

Директор института _____ Белоусов А.В.
подпись, ФИО